

文章编号: 1000-7598 (2009) 06-1810-05

埋深基础地基极限承载力的数值求解方法

梅 岭, 梅国雄, 宰金珉

(南京工业大学 土木工程学院, 南京 210009)

摘 要: 为确定作用在已知埋深、给定基础形状地基土上的极限承载力, 对基底下的土体进行网格划分, 先假定一均布荷载作用在此地基土上, 运用明德林解的积分公式, 结合角点法, 编制 MATLAB 语言程序, 求出每个网格节点上附加应力, 进而求得每个网格节点上主应力, 根据破坏准则, 结合程序找出破坏点的坐标, 利用 MATLAB 的图形处理功能, 把破坏点的坐标在坐标图中显示出来。继续加大矩形荷载, 直至这些破坏点在坐标图中刚好能够形成一个连续的破坏面, 此时的矩形荷载即为此地基的极限承载力。此方法不仅可以有效地避免了地基承载力经验公式中一些不合理的假设带来的误差, 更符合实际情况, 而且可以直观地了解到地基土的三维破坏面。

关 键 词: 埋深基础; 三维破坏面; 极限承载力; 矩形均布荷载

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Numerical analysis of ultimate bearing capacity of ground with deep buried foundation

MEI Ling, MEI Guo-xiong, ZAI Jin-min

(College of Civil Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: The foundation soil is divided for finding the ultimate bearing capacity of a foundation with given buried depth and size. Supposing a uniform load acts on the foundation, Mindlin's integral formula and corner points method are used to get extra stress of every mesh knot by MATLAB program, then the principal stress is found. Combining with failure criterion, MATLAB program is used to find coordinates of points which are destroyed. Using graphic processing function of MATLAB, the failure points are showed in the coordinate. Increasing the rectangular uniform load, the failure points are found until these points can form a continuous failure surface. This rectangular load is the ultimate bearing capacity of the foundation. The method can avoid errors brought by unreasonable hypotheses of the empirical formulas; and the three-dimensional failure surface of the foundation soil is obtained.

Key words: deep buried foundation; three-dimensional failure surface; ultimate bearing capacity; rectangular uniform load

1 前 言

埋深基础的承载力问题是土力学中的一个重要问题, 国内外学者都已经开展了比较广泛而深入的研究。

在国外, Prandtl (1920 年) 年根据塑性理论, 导出了刚性基础压入无重量土中滑动面形状及其相应的极限承载力公式。Reissner 1924 年年在 Prandtl 的基础上, 把基础两侧埋置深度内的土重以连续均布的超载 $q = \gamma D$ 来代替, 得到基础有埋深时地基极限承载力的表达式 (式中: γ 为土体重度, D 为基

础埋深)。20 世纪 50 年代 Meyerhof 提出了考虑基底以上两侧土体抗剪强度影响的极限承载力公式。之后, Hansen、Vesic 等学者在前人的基础上, 各自提出了有埋深的地基承载力的经验公式^[1]。

在国内, 1988 年栾茂田等人^[2]推导了用于确定成层非均质地基极限承载力的计算公式, 基于大量的计算结果, 分析了土体强度及其分布、基础埋深、地震荷载及地下水位深度等各种参数及其组合对地基承载力的影响。分析结果表明, 地基承载力随基础埋深的增大而近似线性地增加。濮家骧和高汉桢^[3]研究表明, 浅基础承载力与基础埋深近似呈正

收稿日期: 2007-11-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50608038)。

第一作者简介: 梅岭, 男, 1982 年生, 博士研究生, 主要从事地基承载力方面的研究。E-mail: mling530@163.com

通讯作者: 梅国雄, 男, 1975 年生, 博士、教授、博导, 主要从事地下空间开发中基本土力学理论与应用研究。E-mail: meiguox@163.com

比关系。李宝强^[4]以土质地基为研究对象, 研究结果显示, 对于 γ 及 c 、 φ 值一定的地基土, 其承载力随基础埋深及基础宽度的增加而增加。

2 地基极限承载力的数值求解方法

假定土体为均匀半弹性空间。在一长度为 l 、宽度为 b 、埋深为 h 的基础上作用均布荷载, 如图 1 所示, 原点选在矩形荷载的中心点, 基础底面粗糙。对矩形荷载作用下的土体进行网格划分, 网格划分图如图 2 所示。由于所研究土体是关于 XOY 的轴对称图形, 那么就可以取第一卦限内的图形进行研究, 亦即取整体的 1/4 作为研究对象。

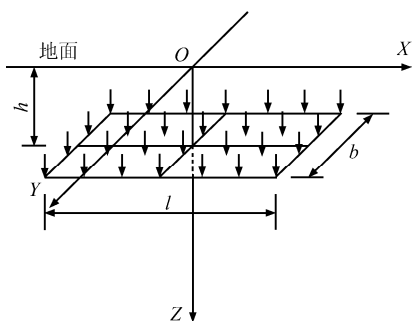


图 1 矩形荷载作用示意图
Fig.1 Diagram of rectangular load

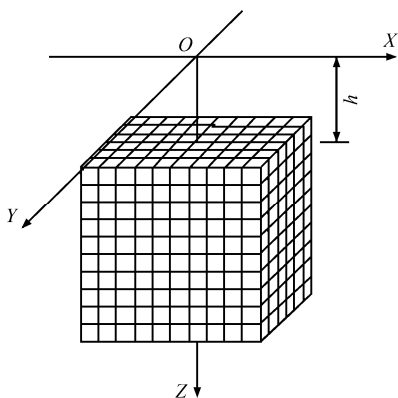


图 2 土体网格划分示意图
Fig.2 Diagram of soil meshes division

当一集中力作用在地基内时, 地基中附加应力的计算可采用弹性理论半无限弹性体内作用一竖向集中力时的明德林解^[5]。当作用均布荷载时, 可由明德林解的积分公式来求取。具体公式详见文献[6]。

选取了研究对象之后, 假定均布荷载为 p , 运用明德林解的积分公式, 结合角点法, 编制 MATLAB 语言程序, 求出第一卦限中每个网格节点上附加应力 σ_{x1} 、 σ_{y1} 、 σ_{z1} 、 τ_{xy1} 、 τ_{yz1} 、 τ_{zx1} 。

之后, 可由式 (1) 得土的全应力。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x1} + K_0(\sigma'_c - \gamma'h) \\ \sigma_y &= \sigma_{y1} + K_0(\sigma'_c - \gamma'h) \\ \sigma_z &= \sigma_{z1} + (\sigma'_c - \gamma'h) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy1} \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz1} \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz1} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: K_0 为侧压力系数, 通常 $K_0 = 1 - \sin\varphi$; σ'_c 为土体的有效自重应力; φ 为土的内摩擦角; γ' 为土的有效重度; h 为基础埋深。

这样就可以解决在地基承载力公式 p_{cr} 、 $p_{1/4}$ 的推导过程中对 $K_0 = 1$ 这一不合理假定所带来的误差问题, 更符合实际情况。在明德林解的积分公式中,

$$\mu = \frac{K_0}{1 + K_0} = \frac{1 - \sin\varphi}{2 - \sin\varphi}。$$

根据以上表达式求出每个网格节点的应力后, 由式 (2) 解得 3 个根, 即为该点的主应力。

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad (2)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

得到每个网格节点的主应力后, 根据破坏准则, 结合程序, 找出破坏点的坐标, 利用 MATLAB 的图形处理功能, 把破坏点的坐标在坐标图中显示出来。继续加大矩形荷载 p , 破坏点由基础边缘向基础中心发展, 当这些破坏点刚好发展至基础中心, 在坐标图中形成一个连续的破坏面, 此时的矩形荷载 p 即为此地基的极限承载力。

破坏准则采用土力学中常用的莫尔-库仑准则。如图 3 所示, 图中的应力为有效应力。

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_3 &= \sigma_3 - u_f \\ \sigma'_1 &= \sigma_1 - u_f \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: u_f 为孔隙水压力,

$$u_f = \beta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 + \alpha\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (5)$$

式中 β 反映平均主应力改变引起的孔隙水压力变化; α 反映剪应力改变引起的孔隙水压力变化, 本程序中取 $1/\sqrt{2}$, 这样求得的结果也趋向于保守。对于饱和土, β 等于 1^[1]。地下水位以上 $u_f = 0$ 。

在图 3 的直角三角形中, 有等式

$$\left(c \cot \varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\mu_f}{2} \right) \sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ 成立, 令}$$

$$S = \left(c \cot \varphi + \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\mu_f}{2} \right) \sin \varphi / \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

由图 3 可知, 当 $S=1$ 时, 土体处于临界状态; 当 $S > 1$ 时, 土体已经破坏; 当 $S < 1$ 时, 土体处于安全状态。考虑留 5 % 的安全范围, 在程序中, 当 $S > 0.95$ 时, 即做出网格结点代表的土体已经破坏的判断。这里采用比商法来选取破坏点, 与比差法相比, 由于进行了归一化处理更为合理。

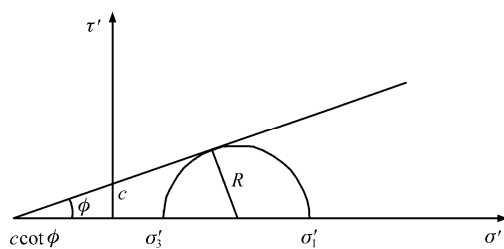


图 3 莫尔-库仑准则
Fig.3 Mohr-Coulomb criterion

3 对比分析

针对多组不同抗剪强度参数的黏性土进行对比分析, 由于篇幅限制, 在此只取一般性的黏性土对问题进行说明。

3.1 长宽比对地基极限承载力的影响

已知一基础宽 $b=10$ m, 埋深 $h=3$ m。基底下的土体取黏聚力 $c=20$ kPa, 内摩擦角 $\varphi=12^\circ$, 土体的重度为 $\gamma=20$ kN/m³, 地下水位在基础底面处。在 MATLAB 中输入这些已知条件和网格划分的精度, 假定一个初始的矩形均布荷载 p , 运行程序, 分别求出 b/l 在等于 $1/10, 1/8, 1/6, 1/4, 1/2, 1$ 下的地基极限承载力, 并与经验承载力公式经过基础形状和深度修正后所得结果相比较, 结果详见表 1。

由表 1 可以知, 随着 b/l 从 1 变化到 $1/10$, 文中所得相应的极限承载力 p 也从 497 kPa 减少到 478 kPa, 且变化率越来越小, 最终接近于定值。该结果与经验公式所得结果的趋势是一致的。

由表 1 可以发现, 当 b/l 较大时, 用本文方法所得结果比其他各经验承载力公式所得结果要小。这是因为经验极限承载力公式是以条形基础为研究对象的, 而 b/l 较大时与条形基础的假设差距较大, 尽管对公式进行了基础形状修正, 但其结果还是有一定误差。在 $b=l$ 时, 本文所得结果要比最大的

Meryerhof 公式计算结果小 8.6 %。

表 1 不同宽长比下承载力的比较

计算方法	承载力/kPa					
	1	1/2	1/4	1/6	1/8	1/10
Meyerhof 法	544	495	471	463	458	456
Hansen 法	517	489	474	468	467	466
Vesic 法	523	484	455	460	457	454
本文方法	497	491	486	482	480	478

当 b/l 较小时, 本文方法所得结果比其他各经验极限承载力公式所得结果要大, 但与其他各经验极限承载力公式所得结果有很好的适应性。这是因为 b/l 越来越小, 亦即基础形式越来越接近于条形基础, 这与经验极限承载力公式的假设相符, 所以本文得到的极限承载力也越来越接近于经验极限承载力公式所得结果。对于其他抗剪强度参数的黏性土也有类似结论, 由此可以发现, 经典土力学中的极限承载力中把该问题当作平面应变问题来看是偏于保守的。

本文结果是在求得破坏面的前提下得到的, 所以在得到极限承载力的同时, 可以得到地基的破坏面形状, 如图 4~6 所示。由图 4 可知, 破坏点是由基础边缘向中心发展的, 当破坏点刚好发展到基础

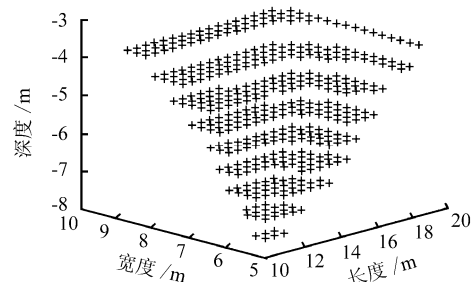


图 4 破坏点三维图
Fig.4 3D diagram of failure points

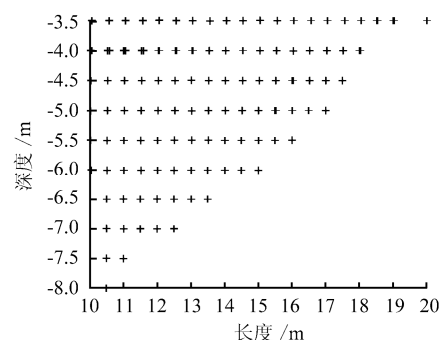


图 5 破坏点长度-深度图
Fig.5 Relationship of l - z of failure points

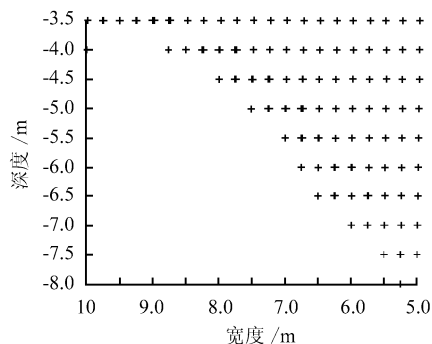


图6 破坏点宽度-深度图

Fig.6 Relationship of b - z of failure points

中心时,则立即形成一个连续的破坏面,且沿宽度方向的破坏点明显多于长度方向。结合图5、图6可知,整个地基的破坏面大致呈锥体形状,且该算例中地基土的破坏深度大约发展到基础底面以下 $b/2$ 处。由于本文考虑的是土体弹性范围内的破坏,这与经典土力学极限承载力中弹性楔体的概念是一致的,形状也是相似的。如图7中的I区所示。

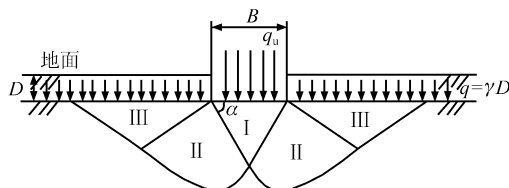


图7 经典土力学中承载力课题

Fig.7 Question of ultimate bearing capacity in the classical soil mechanics

3.2 埋深对地基极限承载力的影响

为分析不同埋深对地基极限承载力结果的影响,本文利用程序计算了6组 $b/l=1/2$ 时不同埋深的地基极限承载力,参数同上文,并与经过形状和深度修正的经验公式结果相比较,具体结果见表2。

表2 不同埋深地基承载力的比较

Table 2 Variations of p with different foundation depths

序号	h/b	经验极限承载力计算值/kPa			本文结果 /kPa
		Meryerhof	Hansen	Vesic	
1	0	278	252	350	316
2	0.3	495	489	484	491
3	0.5	648	663	762	616
4	1.0	1054	1164	1268	980
5	1.2	1232	1389	1495	1098
6	1.5	1505	1751	1859	1274

由表2可知,在不同埋深下,本文方法所得结果与 Meryerhof 公式结果有较好的适应性。当基础相对埋深 h/b 较小时(如 $h/b \leq 0.3$),本文结果一般

比经验公式所得结果大。说明在基础相对埋深较小时,经验公式把基础两侧埋置深度内的土重以连续均布的超载是偏于保守的。特别在埋深 h 为0时,用经验公式来计算地基极限承载力是不合适的。这一现象也被众多荷载板试验所证实^[7-8]。

当基础相对埋深 h/b 较大时,本文方法所得结果比其他各经验公式结果小,说明对于摩擦角较小的黏性土(如新黄土)^[9],地基极限承载力随埋深的增长速率较小,用经验公式计算的地基承载力也将造成不安全的后果。这一现象也被大量的工程实践所证实^[9-11]。

为分析地基极限承载力随基础埋深的增长速率问题,现对表2中除第1组数据的5组数据,以第2组为基准做归一化处理,结果见图8。

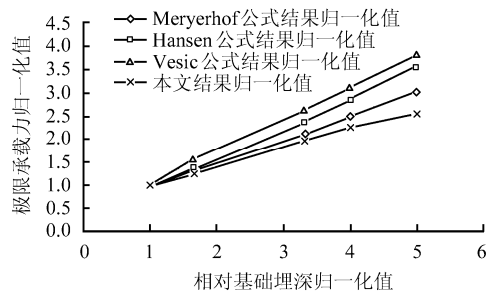


图8 相对埋深对极限承载力的影响

Fig.8 Influence of h/b on ultimate bearing capacity

由图8可知,对于摩擦角较小的黏性土,本文方法与 Meryerhof 公式所得结果最为接近,但随着基础埋深的增加,两者之间的差距也越来越大。图中本文所得结果归一化曲线的斜率要比经验公式结果归一化曲线的斜率平缓得多,亦即本文方法所得的地基极限承载力随基础埋深的增长速率较各经验公式所得结果随基础埋深的增长速率要小。由图8还可以发现,经验公式所得结果归一化后的曲线近似呈直线变化,即随着基础埋深的增加,经验公式所得到的地基极限承载力会无限增长,这一点从经验公式本身就可以看出,但这是与事实不符的。因本文求取地基土的应力是基于 Mindlin 解得到的,而 Mindlin 解考虑到作用力的影响深度,所以本文所得结果归一化后的曲线有明显向一定值收敛的趋势,即随着基础埋深的增加,地基极限承载力会逐渐趋向于一定值,大量的工程实践以及室内试验都证实了这一观点^[11]。如果基础埋深超过了作用力的影响深度,此时按经验公式计算的地基极限承载力就会大大超过实际情况而偏不安全。

3.3 泊松比对地基极限承载力的影响

本文是根据 Mindlin 解求得地基土中的应力,进而求得地基土的主应力,而 Mindlin 解的公式中,涉及到土的泊松比这一重要参数,为研究黏性土泊松比(一般在 0.25~0.42 之间)对地基极限承载力的影响,本文利用程序计算了 4 组 $b/l=1/2$ 时(参数同上文)不同泊松比的地基极限承载力,结果见表 3。

表 3 不同泊松比地基承载力的比较

Table 3 Variations of p with different Poison's ratios				
泊松比 μ	0.25	0.30	0.35	0.40
本文结果/Pa	501	500	497	492

由表可知,对于黏性土,随着泊松比的增加,地基极限承载力逐渐减小,但减小的幅度不大,最大不超过 2%。这是因为 Mindlin 解所得的应力随泊松比的增大而增大,而泊松比的不同引起的误差一般较小,泊松比对应力分布的影响并不显著^[12]。所以,本文方法得到地基极限承载力随泊松比的变化影响不大,泊松比可根据土的种类与状态按经验取值。

4 结 论

(1) 本文一改以往求取极限承载力的思路,以破坏面为桥梁,通过求取地基土的破坏面,进而求得其极限承载力。通过程序,避免了烦琐的数学运算,也可以直观地了解到地基土破坏面的三维形状。

(2) 在地基土的应力求取中,侧压力系数 K_0 取 $1-\sin\varphi$,这样就可以解决在地基承载力公式 p_{cr} 、 $p_{1/4}$ 的推导过程中对 $K_0=1$ 这一不合理假定所带来的误差问题,更符合实际情况。

(3) 对于黏性土,当相对埋深 h/b 较小时,特别是埋深 h 为 0 时,用经验公式来计算地基极限承载力是偏于保守的;对于摩擦角较小的黏性土(如新黄土),当基础相对埋深 h/b 较大时,地基极限承载力随埋深的增长速率较小,用经验公式计算的地基承载力将造成不安全的后果。

(4) 随着基础埋深的增加,经验公式所得到的地基极限承载力会无限增长,这与事实不符。本文方法得到的地基极限承载力随基础埋深的增加逐渐趋向于一定值,符合实际情况。

(5) 本文方法得到地基极限承载力随泊松比的变化影响不大,泊松比可根据土的种类与状态按经验取值。

另外,作用力的影响深度,即经验公式的适用深度,以及泊松比与长宽比、摩擦角对地基极限承载力的综合影响还有待于进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 钱家欢,殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1996: 348—349.
- [2] 栾茂田, 金崇磐, 林皋. 非均质地基上浅基础的极限承载力[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(4): 14—27.
LUAN Mao-tian, JIN Chong-pan, LIN Gao. Ultimate bearing capacity of shallow footings on non-homogeneous soil foundations[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, 10(4): 14—27.
- [3] 濮家骝, 高汉棧. 浅基础承载力离心模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 1988, 10(6): 1—18.
PU Jia-liu, GAO Han-yan. A study of bearing capacity by centrifugal footing tests[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1988, 10(6): 1—18.
- [4] 李宝强. 关于地基承载力的探讨[J]. 岩土工程技术, 2004, 18 (4): 191—193.
LI Bao-qiang. Analysis for bearing capacity of foundation soils[J]. *Geotechnical Engineering Technique*, 2004, 18 (4): 191—193.
- [5] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. *Physics*, 1936, 7(5): 195—202.
- [6] 袁聚云, 赵锡宏. 竖向均布荷载作用在地基内部时的土中应力公式[J]. 力学季刊, 1995, 16(3): 213—222.
YUAN Ju-yun, ZHAO Xi-hong. Formulas for the calculation of stresses in soil subjecting to distributed loading beneath the surface of the ground[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 1995, 16(3): 213—222.
- [7] 高大钊. 软土地基的极限承载力[C]// 第 7 届土力学及基础工程学术会议论文集. 北京: 中国建筑工业出版社, 1994: 325—341.
- [8] BEER D E. Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand[J]. *Geotechnique*, 1970, 20(4): 387—411.
- [9] 蒋洪胜. 浅基础地基承载力的若干问题[J]. 建筑技术, 2000, 31(3): 152—155.
- [10] 范文, 白晓宇, 俞茂宏. 基于统一强度理论的地基极限承载力公式[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 1617—1622.
FAN Wen, BAI Xiao-yu, YU Mao-hong. Formula of ultimate bearing capacity of shallow foundation based on unified strength theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2005, 26(10): 1617—1622.
- [11] 张展君, 朱小林. 基础埋深对地基承载力的影响[J]. 结构工程师, 1990, 3: 73—78.
- [12] 王士杰, 张梅, 张吉占. Mindlin 应力解的应用理论研究[J]. 工程力学, 2001, 18(6): 141—148.
WANG Shi-jie, ZHANG Mei, ZHANG Ji-zhan. On Mindlin stress formulas[J]. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(6): 141—148.